Correction Devoir maison n°12

Exercice 1 - Série - Obligatoire pour les groupes 6 à 10

1. — En passant par les sommes partielles, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k}}{5^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{5^k \times 5} \\ &= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k\end{aligned}$$

Or, comme $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ est une série géométrique convergente. Donc $\sum_{n \geqslant 0} \frac{2^{2n}}{5^{n+1}}$ est une série convergente et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{5^{n+1}} &= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= \frac{1}{5} \times 5 \\ &\boxed{= 1}\end{aligned}$$

— En passant par les sommes partielles, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{2^{k-1}}{k!} &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{k!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{1!} - \frac{1}{2} \frac{2^0}{0!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente. Donc la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{2^{n-1}}{n!}$ est une série convergente et

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} - \frac{3}{2} \\ &\boxed{= \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}}\end{aligned}$$

— En passant par les sommes partielles, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k^2-k)2^{-2k} &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{1}{4^k}\\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{1}{4^k}\\ &= \frac{1}{16}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{1}{4^{k-2}}\end{aligned}$$

Or, comme $|1/4| < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0}(n^2-n)\frac{1}{4^{n-2}}$ est une série géométrique dérivée convergente. Donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(n^2-n)2^{-2n}$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-n)2^{-2n} = \frac{1}{4^2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{2\times 4^3}{27\times 4^2} = \frac{8}{27}}$$

2. — La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente.

— On sait que

$$\sqrt{n}-1 \leq \sqrt{n} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}-1} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. Donc par comparaison de séries à termes positif, la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{n}-1}$ est divergente.

— On s'intéresse à la convergence absolue de cette série. En effet,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^5}\right| = \frac{1}{n^5}$$

Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^5}$ est une série de Riemann convergente. Donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^5}$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 2 - Issue de ECRICOME 2018.

Partie I : Étude de suite

1. (a) La limite en 0 ne pose aucun problème, c'est celle de ln, on a donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.}$$

En $+\infty$, on a une forme indéterminée ; mais on met tout sous un même logarithme et on sait que $x/(x+1)$ tend vers 1 donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\tfrac{1}{x+1} + \ln\left(\tfrac{x}{x+1}\right) = 0.}$$

(b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable comme somme et composée de fonctions usuelles dérivables. On a d'ailleurs

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x+(x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ 0

(c) Par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } u_{n+1} - u_n = f(n).}$$

(d) D'après le tableau de variations de f, on voit que $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En particulier, $f(n) < 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ et

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est (strictement) décroissante.}}$$

(e) C'est un petit programme sans réelle difficulté que l'on peut faire avec une boucle `for` ou avec une opération pointée. On propose les deux versions.

```
function y=u(n)
    y=0;
    for k=1:n
        y=y+1/k;
    end
    y=y-log(n)
endfunction
```

ou bien

```
function y=u(n)
    y=sum([1:n].^(-1))-log(n)
endfunction
```

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = \tfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right).}$$

(b) On pose la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$. Cette fonction est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0$$

La fonction g est donc strictement décroissante et $g(0) = 0$ donc la fonction g est négative ou nulle. En conséquent

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) \leq x.}$$

En appliquant cette inégalité à $x = 1/n$, on voit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ ou encore que

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est croissante.}}$$

(c) On pose la fonction $h(x) = \ln(1+x) - x - \dfrac{x^2}{2}$. La fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} - x = \frac{1+x-1-x-x^2}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} < 0$$

La fonction h est donc strictement décroissante et $h(0) = 0$. La fonction h est donc strictement négative. On en conclut que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}.}$$

(d) En remplaçant dans la dernière inégalité x par $\dfrac{1}{n}$, on a directement

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

La série de terme général $1/2n^2$ est convergente comme multiple d'une série de Riemann convergente. Par comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série de terme générale } v_{n+1} - v_n \text{ est donc convergente.}}$$

On note alors γ la valeur de sa somme

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n).$$

(e) Le calcul de la somme partielle de la série susnommée fait apparaitre une somme télescopique ;

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1$$

Or $v_1 = u_1 - 1$ et $u_1 = 1$ donc $v_1 = 0$ et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n.}$$

Ainsi, (v_n) est convergente et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1}-v_k) = \sum_{k=1}^{n+\infty}(v_{k+1}-v_k) = \gamma.}$$

3. (a) Cette question n'étant pas vraiment formulée ; on interprète l'énoncé comme une demande de justification de la convergence de (u_n) et le calcul de sa limite. On voit que

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Comme (v_n) converge et que $1/n \to 0$, on en déduit que

$$\boxed{(u_n) \text{ converge et a la même limite que } (v_n), \text{ c'est à dire } \gamma.}$$

(b) (v_n) étant croissante et convergente vers γ, (u_n) étant décroissante et convergente vers γ, on a bien l'encadrement demandé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n.}$$

Ceci permet de voir que

$$0 \leq u_n - \gamma = v_n - \gamma + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

ce qui donne bien

$$\boxed{|u_n - \gamma| \leq \tfrac{1}{n}.}$$

(c) Le programme proposé permet de calculer une approximation de γ à la précision `eps` près (rentrée par l'utilisateur). En effet, une telle approximation sera réalisée par un terme u_n tel que $|u_n - \gamma| <$ `eps`, ce qui, d'après la question précédente a lieu dès que $1/n <$ `eps`. Il suffit de prendre le premier entier n tel que $n >$ `1/eps`, donné par $\lfloor$`1/eps`$\rfloor + 1$.

Partie II : Étude d'une série

1. (a) On a pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned} 2n-1 \geq n &\Longleftrightarrow \frac{1}{2n-1} \leq \frac{1}{n} \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{n(2n-1)} \leq \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Donc, on a bien

$$\boxed{a_n \leq \frac{1}{n^2}.}$$

(b) La série de terme général $\dfrac{1}{2n^2}$ est un multiple d'une série de Riemann convergente. Par comparaison de deux séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série de terme général } a_n \text{ converge.}}$$

2. (a) Observons que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et

$$\boxed{\text{on reconnait une décomposition des indices de sommation selon leur parité.}}$$

(b) Il suffit de mettre au même dénominateur et de procéder par identification

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(2n-1)}=\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{2n-1} \quad &\iff \quad \frac{1}{n(2n-1)}=\frac{\alpha(2n-1)+\beta n}{n(2n-1)}\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha+\beta &=& 0\\ -\alpha &=& 1\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& -1\\ \beta &=& 2\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } a_n=\frac{-1}{n}+\frac{2}{2n-1}.}$$

(c) On utilise les résultats des deux dernières questions

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} && \text{(d'après 2b.)}\\ &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) && \text{(d'après 2a.)}\\ &= 2\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.}$$

3. (a) On revient à la définition de u_n

$$\begin{aligned}u_{2n}-u_n+\ln(2) &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln(2n)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln(n)+\ln(2)\\ &= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln(2)-\ln(n)+\ln(n)+\ln(2)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{u_{2n}-u_n+\ln(2)=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.}$$

(b) D'après 2c. et 3a., on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\\ &= \lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\\ &= 2\times\lim_{n\to+\infty}\left(u_{2n}-u_n+\ln(2)\right)\end{aligned}$$

or, comme (u_n) converge, u_{2n} et u_n ont même limite et leur différence tend vers 0. Donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2).}$$

4. (a) On voit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}.\end{aligned}$$

(b) On reconnait une série de Riemann, on a alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\ln(2),$$

et on retrouve bien la valeur précédente

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}a_k &= 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\\ &= 2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve le résultat de la question précédente, à savoir,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}a_k=2\ln(2).}$$

Exercice 3 - Issue de ESSEC - Groupe 1 et 2

Dans cette première partie on considère un ensemble discret $\mathcal{K}$ dont on suppose qu'il est soit fini soit égal à l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble de toutes les parties de $\mathcal{K}$ et pour tout $A\in\mathcal{A}$, on note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans $\mathcal{K}$.

Soient P et Q deux lois de probabilité sur $\mathcal{K}$. (**N.B.** en fait, ce sont des probabiltiés) Pour tout $k\in\mathcal{K}$, on pose $p_k=P(\{k\})$ et $q_k=Q(\{k\})$. On rappelle que pour tout $k\in\mathcal{K}$, $p_k\geq 0$, avec $\sum_{k\in\mathcal{K}}p_k=1$. De plus toute probabilité P est entièrement déterminée par la donnée de $(p_k)_{k\in\mathcal{K}}$ puisque pour tout $A\in\mathcal{A},\ P(A)=\sum_{k\in A}p_k$

Lorsque $\mathcal{K}$ est fini on définit la distance en variation entre les probabilités P et Q par

$$D(P,Q)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{K}}|p_k-q_k| \tag{(i)}$$

Partie 1 *Exemples de distance avec la loi uniforme.*

Dans cette première partie, on va calculer la distance en variation entre des probabilités connues.

1. On lance des pièces de monnaie et on observe si on tombe sur pile (0) ou sur face (1). L'univers est donc $\mathcal{K} = \{0, 1\}$. On lance d'un côté une pièce non truqué qui suit une loi de probabilité uniforme noté P. D'un autre côté, on lance une pièce truquée qui a la loi de probabilité Q définie par $Q(\{0\}) = q_0 = \frac{1}{4}$ et $Q(\{1\}) = q_1 = \frac{3}{4}$.
   La loi de P est uniforme donc
   $$\boxed{p_0 = \frac{1}{2} \text{ et } p_1 = \frac{1}{2}}$$
   On calcule alors
   $$\begin{aligned} D(P,Q) &= \frac{1}{2}\left(|p_0 - q_0| + |p_1 - q_1|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &\boxed{= \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

2. On lance maintenant des dés et on note la face sur laquelle on tombe. L'univers est $\mathcal{K} = [\![1, 6]\!]$. On lance d'un côté un dé non truqué muni de la loi uniforme P. D'un autre côté, on lance un dé truquée qui a la loi de probabilité Q définie par
   $$Q(\{1\}) = q_1 = \frac{1}{12}, \quad q_2 = \frac{1}{6}, \quad q_3 = \frac{1}{4}, \quad q_4 = \frac{1}{12}, \quad q_5 = \frac{1}{6}, \quad q_6 = \frac{1}{4}.$$
   De même que dans la question précédente,
   $$\boxed{p_k = \frac{1}{6},\ k \in [\![1, 6]\!].}$$
   On calcule alors
   $$\begin{aligned} D(P,Q) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k \in [\![1,6]\!]} |p_k - q_k|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left|\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right| + \left|\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right| + \left|\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right| + \left|\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right| + \left|\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12}\right) \\ &\boxed{= \frac{1}{6}} \end{aligned}$$

3. On considère $n = 2p$ un nombre pair. Dans les deux expériences suivantes, on tire des boules numérotées de 1 à n dans une urne et on regarde le numéro sur lequel on tombe. L'univers est donc $\mathcal{K} = [\![1, n]\!]$. Dans la première urne, il y a 1 boule portant chaque numéro (il y a donc n boules en tout). On associe à cette expérience la loi de probabilité P.
   (a) Chaque boule portant le même numéro et les boules étant indiscernable. La loi de probabilité est uniforme. On a donc $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(\{k\} = \frac{1}{n}$
   Dans la seconde urne, il y a 1 boule portant le numéro 1, 2 boules portant le numéro 2, ..., n boules portant le numéro n. On associe à cette expérience la loi de probabilité Q.
   (b) Pour cette expérience, il y a

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \text{ boules au total.}}$$

(c) On a donc

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!], \quad q_k = \frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}}$$

(d) On a donc

$$\begin{aligned}
D(P,Q) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |p_k - q_k| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{n} - \frac{2k}{n(n+1)}\right| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \left|\frac{n+1-2k}{n(n+1)}\right| \\
&= \frac{1}{2n(n+1)}\sum_{k=1}^{p} |2p+1-2k| + \frac{1}{2n(n+1)}\sum_{k=p+1}^{2p} |2p+1-2k| \\
&= \frac{1}{2n(n+1)}\sum_{k=1}^{p} (2p+1-2k) + \frac{1}{2n(n+1)}\sum_{k=p+1}^{2p} 2k-(2p+1) \\
&= \frac{1}{2n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{p} 2p+1 - 2\sum_{k=1}^{p} k + 2\sum_{k=p+1}^{2p} k - \sum_{k=p+1}^{2p} (2p+1)\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=p+1}^{2p} k = \sum_{k=1}^{2p} k - \sum_{k=1}^{p} k = \frac{2p(2p+1)}{2} - \frac{p(p+1)}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned}
D(P,Q) &= \frac{1}{2n(n+1)}\left(p(2p+1) - p(p+1) + 2p(2p+1) - p(p+1) - p(2p+1)\right) \\
&= \frac{1}{2n(n+1)}\left(2p(2p+1) - 2p(p+1)\right) \\
&= \frac{1}{2n(n+1)}\left(2p(2p+1-p-1)\right) \\
&= \frac{2p \times p}{2n(n+1)} \\
&= \frac{n \times n/2}{2n(n+1)} \\
&\boxed{= \frac{n}{4(n+1)}}
\end{aligned}$$

Partie 2 ***Distance en variation.***

1. Lorsque $\mathcal{K} = \{0;1\}$
   on a $D(P,Q) = \frac{1}{2}(|p_0 - q_0| + |p_1 - q_1|)$
   et comme $p_0 + p_1 = 1$ on a donc $p_0 = 1 - p_1$ et $q_0 = 1 - q_1$.
   Donc

$$\boxed{D(P,Q) = \frac{1}{2}\left(|q_1 - p_1| + |p_1 - q_1|\right) = |p_1 - q_1| \text{ (car } |-x| = |x| \text{ pour tout } x \text{ réel)}}$$

2. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $0 \leq P(A) \leq 1$ et $0 \leq Q(A) \leq 1$
   Donc $-1 \leq P(A) - Q(A) \leq 1$ d'où $|P(A) - Q(A)| \leq 1$ (équivaut en fait)
   Conclusion : $\boxed{|P(A) - Q(A)| \in [0,1].}$
3. Pour tout $A \in \mathcal{A}$,
   $P(A) = \sum_{k \in A} p_k$ et en s'inspirant de la question 1) $\sum_{k \in A} p_k = 1 - \sum_{k \in \bar{A}} p_k$ (et de même pour Q)
   Donc $P(A) - Q(A) = \sum_{k \in A}(p_k - q_k)$ d'une part
   et $P(A) - Q(A) = 1 - \sum_{k \in \bar{A}} p_k - 1 - \sum_{k \in \bar{A}} q_k = \sum_{k \in \bar{A}}(q_k - p_k) = -\sum_{k \in \bar{A}}(p_k - q_k)$ d'autre part.
   Donc
$$\begin{aligned} 2|P(A) - Q(A)| &= |P(A) - Q(A)| + |P(A) - Q(A)| \\ &= \boxed{\left|\sum_{k \in A}(p_k - q_k)\right| + \left|\sum_{k \in \bar{A}}(p_k - q_k)\right|} \end{aligned}$$
4. On a $D(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|$ et $\mathcal{K} = A \cup \bar{A}$ (disjointe)
   Donc $D(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k \in A}|p_k - q_k| + \sum_{k \in \bar{A}}|p_k - q_k|\right)$
   Et comme $\sum_{k \in A}|p_k - q_k| \geq \left|\sum_{k \in A} p_k - q_k\right|$ alors
$$\begin{aligned} 2D(P,Q) &\geq \left|\sum_{k \in A} p_k - q_k\right| + \left|\sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k\right| \\ &\geq 2|P(A) - Q(A)| \end{aligned}$$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } A \in \mathcal{A},\ |P(A) - Q(A)| \leq D(P;Q)}$
5. Soit $A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\}$
   On a alors pour tout $k \in A$: $|p_k - q_k| = -(p_k - q_k)$ et pour $k \in \bar{A}$, $|p_k - q_k| = p_k - q_k$ (car dans $\bar{A}$, $q_k \geq p_k$ est faux)
   Donc
$$\begin{aligned} D(P,Q) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k \in A}|p_k - q_k| + \sum_{k \in \bar{A}}|p_k - q_k|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sum_{k \in A} p_k - q_k + \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left|\sum_{k \in A} p_k - q_k\right| + \left|\sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k\right|\right) \\ &= |P(A) - Q(A)| \end{aligned}$$
   car $\sum_{k \in A} p_k - q_k \leq 0$ et $\sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \geq 0$.
   Conclusion : $\boxed{\text{avec } A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\} : |P(A) - Q(A)| = D(P;Q)}$
6. On utilisera la notation $\min(a,b) = a \wedge b$. On réutilise la question précédente :
   Avec $A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\}$ on a $D(P,Q) = |P(A) - Q(A)|$
   Or pour $k \in A$: $p_k \wedge q_k = p_k$ et pour $k \in \bar{A}$: $p_k \wedge q_k = q_k$.

Donc

$$\begin{array}{rcl} 1-\sum\left(p_k\wedge q_k\right) & = & 1-\sum\limits_{k\in A}p_k-\sum\limits_{k\in\bar{A}}q_k \\ \text{et comme } 1-\sum\limits_{k\in A}p_k & = & P\left(\bar{A}\right)=\sum\limits_{k\in\bar{A}}p_k \text{ alors} \\ 1-\sum\left(p_k\wedge q_k\right) & = & \sum\limits_{k\in\bar{A}}p_k-q_k=Q\left(A\right)-P\left(A\right) \end{array}$$

commme on l'a vu en 3
Et comme ici $Q\left(A\right)-P\left(A\right)=\sum q_k-p_k\geq 0$ et $Q\left(A\right)-P\left(A\right)=\left|P\left(A\right)-Q\left(A\right)\right|$on a bien finalement :
Conclusion : $\boxed{D\left(P;Q\right)=1-\sum_{k\in\mathcal{K}}p_k\wedge q_k}$